

### 一. 光的描述

$$\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P) [\cos(\omega t - \varphi(P))]$$

$$\vec{H}(P, t) = \vec{H}_0(P) [\cos(\omega t - \varphi(P))]$$

在各向同性介质中满足波动条件时, 可表示成

$$U(P, t) = A(P) [\cos(\omega t - \varphi(P))] \Leftrightarrow \tilde{U}(P, t) = A(P) e^{i[\omega t - \varphi(P)]} = \tilde{U}(P) e^{-i\omega t}$$

$$\text{光的强度 } I(P) = [A(P)]^2 = \tilde{U}^*(P) \tilde{U}(P)$$

### 二. 波的叠加原理

波有独立传播定律, 在线性介质中, 满足波的叠加原理.

$$\tilde{U}(P) = \tilde{U}_1(P) + \tilde{U}_2(P): P \text{ 点的复振幅}$$

$$I(P) = \tilde{U}^*(P) \tilde{U}(P) = [\tilde{U}_1^*(P) + \tilde{U}_2^*(P)] [\tilde{U}_1(P) + \tilde{U}_2(P)]$$
$$= [A_1(P)]^2 + [A_2(P)]^2 + A_1(P) A_2(P) (e^{-i\varphi_1(P) + i\varphi_2(P)} + e^{i\varphi_1(P) - i\varphi_2(P)})$$

$$\text{即 } I(P) = I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P) I_2(P)} \cos \delta(P) \text{ 其中 } \delta(P) = \varphi_1(P) - \varphi_2(P)$$

设  $A_1(P) = A_2(P) = A$ ,  $I_1(P) = I_2(P) = A^2$ , 上式化为

$$I(P) = 2A^2 [1 + \cos \delta(P)] = 4A^2 \cos^2 \frac{\delta(P)}{2}$$

即强度分布是相位差  $\delta(P)$  的周期性函数.

$$\text{衬比度 } \gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \in [0, 1]$$

### 三. 普通光源发光微观机制的特点

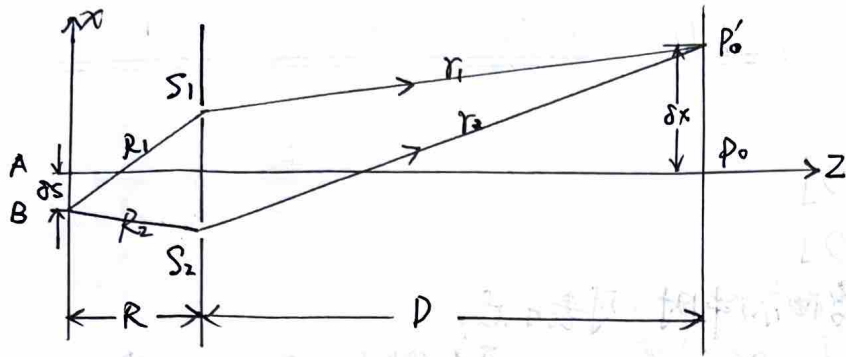
普通光源 (非激光) 的发射过程以自发辐射为主, 每个原子或分子先后发射的不同波列及不同原子或分子发射的各个波列在振动方向和相位上没有联系.

相位差  $\delta = \varphi_1 - \varphi_2$  不固定,  $\overline{\cos \delta} = 0$ .

$$\text{非相干叠加: } I(P) = I_1(P) + I_2(P)$$

### 四. 光场的空间相干性.

本质上来源于扩展光源不同部分发光的独立性。表现在波场的横方向上。



$P_0$  是零级条纹所在处,  $R_2 - R_1 = -\frac{d\delta s}{R} = r_1 - r_2 = \frac{d\delta x}{D}$   
 $\therefore \delta x = -\frac{D}{d}\delta s$ .

当光源上 \$A\$ 产生的暗纹与 \$B\$ 产生的零级亮纹在 \$P\_0\$ 点重合时, 合成强度均匀. 对比度为 0. 此时  $\delta x = \Delta x$ , 设  $\delta s = b_0$ .

在杨氏实验中, 有  $b_0 = \frac{R}{D}\Delta x = \frac{R}{D} \cdot \frac{D\lambda}{2} = \frac{R\lambda}{2}$ .

反之, 若  $d = \frac{R\lambda}{b_0}$  是光场中相干范围的横向线度.

孔径角  $\Delta\theta = d/R$ , 则  $b_0 \Delta\theta \approx \lambda$ . 应用: 迈克尔逊测量干涉仪.

### 五. 光场的时间相干性.

本质上来源于光源发光过程在时间上的断续性。表现在波场的纵方向上。

比较光程差  $\Delta L = (SP_1) - (SP_2)$  与光程  $L_0 = c\tau_0$ :

当  $\Delta L > L_0$  时,  $P_1, P_2$  不可能属于同一波列, 不可能相干.

当  $\Delta L < L_0$  时,  $P_1, P_2$  有可能属于同一波列, 部分相干.

当  $\Delta L = 0$  时,  $P_1, P_2$  完全相干.

$L_0 = n\lambda_0 = n\omega\tau_0 = c\tau_0$ : 相干长度.

$\tau_0 = L_0/c$ : 相干时间.

定态光波  $\tilde{u} = \tilde{A}e^{ikx}$ , 若是一线宽为  $\Delta k$  的谱线, 复振幅为  $\tilde{u} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\alpha}(k)e^{ikx} dk$ .

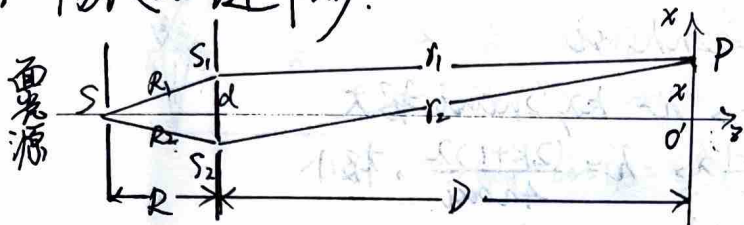
其中  $\tilde{\alpha}(k)$  是谱线的线型. 设  $k$  在  $k_0 \pm \Delta k/2$  区间时,  $\tilde{\alpha}(k) = \pi\tilde{A}/\Delta k$ , 超出此范围时为 0, 于是  $\tilde{u} = \frac{\tilde{A}}{\Delta k} \int_{k_0 - \Delta k/2}^{k_0 + \Delta k/2} e^{ikx} dk = \tilde{A} \frac{\sin(\Delta k x/2)}{\Delta k x/2} e^{ik_0 x}$

在  $x = 2\pi/\Delta k = \lambda^2/\Delta\lambda$  的地方振幅为 0. 这里即波列的端点. 故波列长度  $L_0$  的量级为  $L_0 \approx \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ .

$\therefore \tau_0 \Delta\nu \approx 1$ .

## 六. 分波振面法.

### 1. 杨氏双缝干涉.



$$\phi_{10} = \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} R_1, \quad \phi_{20} = \phi_0 + \frac{2\pi}{\lambda} R_2.$$

$$\therefore \phi_{10} - \phi_{20} = \frac{2\pi}{\lambda} (R_1 - R_2) = 0$$

$\therefore$  次波源  $S_1, S_2$  初相位相同.

$r_1 - r_2 \approx d\theta \approx \frac{dx}{D}$ . (在  $d \ll D$  远场条件).  $x \ll D$  (傍轴条件) 下, 等强度面在屏上

由双曲线近似为直线. 相位差  $\delta(P) = \frac{2\pi}{\lambda} (r_1 - r_2) = \frac{2\pi d}{\lambda D} x$ . 条纹间距  $\Delta x = \frac{\lambda D}{d}$ .

1) 考虑移过某个固定场点  $P$  干涉条纹的数目  $N$ , 每当两相干光线间光程差  $\Delta L(P)$  增减一个  $\lambda$  时, 有一根干涉条纹移过  $P$  点. 问  $N$  与光程差的改变量  $\delta(\Delta L)$

间的关系:  $\delta(\Delta L) = N\lambda$ .

2) 考虑光源宽度对干涉条纹对比度的影响.

屏上  $x$  处:  $I(x) \propto 1 + \cos \delta(x) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda D} x\right) = 1 + \cos\left(\frac{2\pi x}{\Delta x}\right)$ .

若光源移动  $\delta s$  引起条纹移动  $\delta x$ , 强度分布为:

$$\begin{aligned} I(x) &\propto 1 + \cos \delta(x) = 1 + \cos\left[\frac{2\pi d}{\lambda D} (x - \delta x)\right] = 1 + \cos\left[\frac{2\pi d}{\lambda D} \left(x + \frac{D}{d} \delta s\right)\right] \\ &= 1 + \cos \frac{2\pi x}{\Delta x} \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda R} \delta s\right) - \sin \frac{2\pi x}{\Delta x} \sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda R} \delta s\right) \\ &= 1 + \cos \frac{2\pi x}{\Delta x} \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda R} \delta s\right) - \sin \frac{2\pi x}{\Delta x} \sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda R} \delta s\right). \end{aligned}$$

将宽为  $b$  的光源在  $x$  点的贡献积分:

$$\begin{aligned} I(x) &= \frac{I_0}{b} \int_{-b/2}^{b/2} \left[ 1 + \cos \frac{2\pi x}{\Delta x} \cos\left(\frac{2\pi d}{\lambda R} \delta s\right) - \sin \frac{2\pi x}{\Delta x} \sin\left(\frac{2\pi d}{\lambda R} \delta s\right) \right] d(\delta s) \\ &= I_0 \left[ 1 + \frac{\sin(\pi db/\lambda R)}{\pi db/\lambda R} \cos \frac{2\pi x}{\Delta x} \right] \end{aligned}$$

$$\therefore \gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} = \left| \frac{\sin(\pi db/\lambda R)}{\pi db/\lambda R} \right|.$$

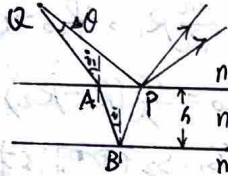
2. 菲涅耳双镜.  $\Delta x = \frac{\lambda(B+C)}{2\alpha B}$

3. 菲涅耳双棱镜.  $\Delta x = \frac{\lambda(B+C)}{2(n-1)\alpha B}$

4. 劳埃德镜  $\Delta x = \frac{\lambda D}{2a}$

七. 分振幅法.

1. 等厚干涉.



$\Delta L(P) \approx 2nh \cos i$

$\Delta L = k\lambda, h = \frac{k\lambda}{2n \cos i}$  极大

$\Delta L = \frac{2k+1}{2}\lambda, h = \frac{(2k+1)\lambda}{4n \cos i}$  极小

当入射光近似垂直于薄膜表面时,  $\Delta L = 2nh,$

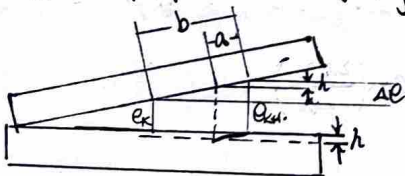
$\Delta h = \frac{\lambda}{2n}$

在劈尖上,  $\Delta x \cdot \alpha = \Delta h, \Delta x = \frac{\lambda}{2n\alpha}$ . 得劈尖倾角  $\alpha = \frac{\lambda}{2n\Delta x}$ .

当只有厚度改变, 即  $\alpha$  变时,  $\Delta x$  会随之变, 条纹变疏或变密.

当上下两面有相对平移时, 因  $\alpha$  未变,  $\Delta x$  不会变;  $h$  变, 故  $h = \frac{k\lambda}{2n}$  中  $k$  (级次) 变.

当底部有“岭”或“沟”时, 条纹也会随之出现凹凸:



$b$ : 条纹间距;  $a$ : 条纹弯曲深度.

$e_k, e_{k+1}$ :  $k$  级和  $k+1$  级条纹对应的正常空气膜厚度.

$h$ : 纹路深度.

$\frac{h}{\Delta e} = \frac{a}{b},$  对空气膜  $\Delta e = \frac{\lambda}{2}, \therefore h = \frac{2a}{b}$ .

牛顿环:  $r_k^2 = R^2 - (R - h_k)^2 = 2Rh_k - h_k^2 \approx 2Rh_k = 2R \cdot \frac{k\lambda}{2} = kR\lambda.$

$\therefore r_k = \sqrt{kR\lambda}$ : 条纹半径.

$\therefore R = \frac{r_{k+m}^2 - r_k^2}{m\lambda}$ .

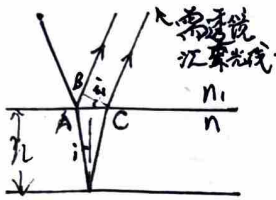
将标准件(玻璃量规)覆盖于待测工件之上, 两者间形成空气膜  
因而出现牛顿环, 圈数越多公差越大.  $\Delta h = \frac{\lambda}{2}$ .

增透膜:  $2nh + \frac{\lambda}{2} = k\lambda, h = (k - \frac{1}{2})\lambda / 2n.$   $k=1$  时,  $h = \frac{\lambda}{4}$ .

当  $n_{\text{玻}} < n_{\text{膜}} < n_{\text{玻}}$  时, 上下两束光有效光程差中无半波损失, 从而  
位相差为  $\pi$ , 相互叠加结果为暗场.

且满足  $n_{\text{膜}} = \sqrt{n_{\text{玻}} \cdot n_{\text{玻}}}$  时, 实现完全消反射.

## 2. 等倾干涉.



光程差  $\Delta L = 2nh \cos i$

$\Delta L = k\lambda, \cos i_k = \frac{k\lambda}{2nh}$

$\Delta L = (k+1)\lambda, \cos i_{k+1} = \frac{(k+1)\lambda}{2nh}$

$\therefore \cos i_{k+1} - \cos i_k = \frac{\lambda}{2nh} \approx \left( \frac{d \cos i}{d i} \right)_{i=i_k} (i_{k+1} - i_k) = -\sin i_k (i_{k+1} - i_k)$

$\therefore \Delta i = i_{k+1} - i_k \approx \frac{\lambda}{2nh \sin i_k}$

$\therefore i_{k+1} < i_k$ ,  $i_k$  越大,  $|\Delta i|$  越小, 即离中心远处条纹较密;  $h$  大,  $|\Delta i|$  小, 较厚的膜产生的等倾条纹较密.

中心点 O 的光程差  $\Delta L = 2nh$ , 每当  $h$  改变  $\lambda/2n$  时,  $\Delta L$  改变  $\lambda$ ,  $h$  增大, 中心级条纹级数增大, 条纹发散,

$h$  减小, 中心级条纹级数减小, 条纹会聚.

若将点光源换为扩展光源, 所有点光源产生的像有相同的倾角和光程差, 产生一样的干涉图样, 衬比度不受影响而图样更亮.

### 迈克耳孙干涉仪:

$M_1 // M_2$ : 等倾条纹,  $M_1$  与  $M_2$  越近, 条纹越稀疏.

$M_1$  和  $M_2$  有微小夹角时: 等厚条纹,  $M_1$  每移动一个距离, 视场中有一个条纹移过.  $l = N \frac{\lambda}{2}$ , 由于光源非单色性影响, 随光程差  $\Delta L$  加大, 干涉条纹衬比度下降, 干涉测长的量程

$l_{\max} = \frac{1}{2} \Delta L_{\max} = \frac{\lambda}{2\Delta \lambda}$

# 衍射

## 一. 惠更斯-菲涅耳原理.

次波相干叠加: 
$$\tilde{u}(P) = \frac{i}{2\lambda} \iint (\cos\theta_0 + \cos\theta) \tilde{u}_0(Q) \frac{e^{ikr}}{r} d\Sigma$$

光源和接收范围满足傍轴条件时:  $\theta \approx \theta_0 \approx 0, r \approx r_0$ , 则

$$\tilde{u}(P) = \frac{i}{2\lambda r_0} \iint \tilde{u}_0(Q) e^{ikr} d\Sigma$$

巴比涅原理: 对于互补屏:  $\Sigma_0 = \Sigma_a + \Sigma_b, \therefore \iint_{\Sigma_a} d\Sigma + \iint_{\Sigma_b} d\Sigma = \iint_{\Sigma_0} d\Sigma$

$$\therefore \tilde{u}_a(P) + \tilde{u}_b(P) = \tilde{u}(P) \stackrel{\text{衍射区}}{=} 0$$

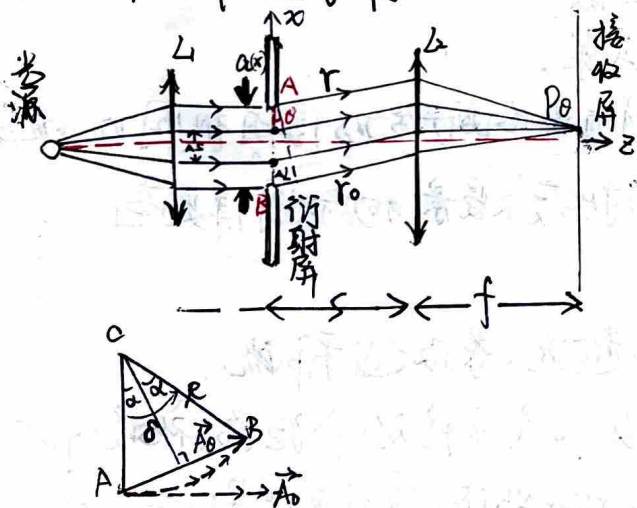
$$\therefore \tilde{u}_a(P) = -\tilde{u}_b(P)$$

$$I_a = \tilde{u}_a \tilde{u}_a^* = \tilde{u}_b \tilde{u}_b^* = I_b(P)$$

即互补屏在衍射屏产生的衍射图样一样.

## 二. 菲涅耳衍射 (近源/近屏) $\rightarrow$ 夫琅禾费衍射 (远源 & 远屏).

### 1. 夫琅禾费单缝衍射.



$\Delta L = a \sin\theta$   
由A作一系列等长小矢量首尾相接, 逐个转过一个相同的小角度, 最后到达B点.  
总共转过的角度为  $\theta = \frac{2\pi}{\lambda} \Delta L = \frac{2\pi a}{\lambda} \sin\theta$ .  
每一个小矢量代表沿向上窄条  $\Delta S$  对  $P_0$  处振动的贡献

$$A_0 = \overline{AB} = 2R \sin\alpha, R = \frac{AB}{2\alpha}$$

$$\therefore A_0 = \overline{AB} = \frac{AB \sin\alpha}{\alpha}$$

将  $\overline{AB}$  舒展开成直线, 代表  $\theta=0$  时的振幅  $A_0$

$$\therefore A_0 = A_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \alpha = \frac{d}{z} = \frac{\pi a}{\lambda} \sin\theta \quad \therefore I_0 = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2 \text{ 为 } \theta \text{ 处的光强,}$$

或由菲涅耳-基尔霍夫公式推导: 
$$\tilde{u}(\theta) = \frac{-i}{2f} \iint \tilde{u}_0 e^{ikr} dx dy$$
, 光程差  $\Delta r = r - r_0 = -a \sin\theta$ , 在正入射的情况下  $\tilde{u}_0$  是  $x, y$  无关量, 将上式先对  $y$  积分并把所有与  $x$  无关的因子并成常量  $C$ , 得

$$\tilde{u}(\theta) = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{ikr} dx = C \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} e^{-ikx \sin\theta} dx$$

$$= C \frac{e^{-i(kx \sin\theta)} \Big|_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}}{-ik \sin\theta} = 2C \frac{\sin(ka \sin\theta)}{k \sin\theta} = \tilde{u}_0 \frac{\sin\alpha}{\alpha}, \alpha = \frac{ka \sin\theta}{2} = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$$

$$\therefore I_0 = I_0 \left(\frac{\sin\alpha}{\alpha}\right)^2, \text{ 其中 } I_0 = \tilde{u}_0^* \tilde{u}_0 \text{ 是衍射场中心强度.}$$

1) 主极大: 零级衍射斑.

$\alpha=0, \theta=0$  各行射线之间无光程差, 光强最大。是几何光学的像点.

2) 次极大: 级次高的衍射斑.

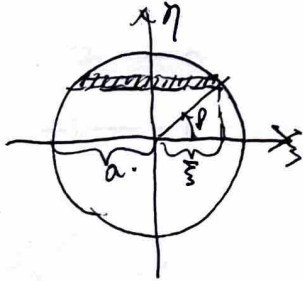
$\frac{dI}{d\alpha} = 0 \Rightarrow \alpha = \tan \alpha$ , 得  $\sin \theta = \pm 1.43 \frac{\lambda}{a}, \pm 2.46 \frac{\lambda}{a}, \pm 3.47 \frac{\lambda}{a} \dots$   
如用半波带法求, 则  $a \cdot \sin \theta = \frac{2k+1}{2} \lambda$ ,  $\sin \theta = \frac{2k+1}{2} \frac{\lambda}{a} = \pm 1.5 \frac{\lambda}{a}, \pm 2.5 \frac{\lambda}{a} \dots$   
误差不大.

3) 暗斑:  $\sin \alpha = 0, \alpha = \pm \pi, \pm 2\pi \dots, \sin \theta = \pm \frac{\lambda}{a}, \pm \frac{2\lambda}{a} \dots$ , 这与半波带法结果一致.

4) 亮斑角宽度: 在傍轴条件下,  $\theta \approx \pm \frac{\lambda}{a}$  是暗斑位置.

故亮斑在  $\theta = \pm \frac{\lambda}{a}$  之间, 半角宽为  $\Delta \theta = \frac{\lambda}{a}$ , 是衍射场弥散的程度.  
零级亮斑宽度  $w = 2 \cdot \Delta \theta$ .

## 2. 夫琅禾费圆孔衍射.



傍轴条件下,  $u = \text{常数} \int_{\Sigma} e^{-ikr \sin \theta} dS d\eta$ .

在  $-\frac{\pi}{2} < \theta < \frac{\pi}{2}$  的范围内积分得

$$u = \text{常数} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\sin \theta} \sin(k \frac{r}{\sin \theta} \sin \theta) d\eta$$

$$\because \frac{r}{\sin \theta} = a \cos \beta, \eta = a \sin \beta, \therefore u = \text{常数} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(ka \cos \beta) \cos \beta d\beta$$

$$\because \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \sin(z \cos \beta) \cos \beta d\beta = \frac{J_1(ka \sin \theta)}{\sin \theta}, \therefore u = \text{常数} \frac{J_1(ka \sin \theta)}{\sin \theta}, \text{强度 } I \propto |u|^2 = \text{常数} \frac{J_1^2(ka \sin \theta)}{\sin^2 \theta}$$

对于很小的  $z, J_1(z)/z \sim 1$ .  $I_0$  表示未衍射光的强度, 有  $I = I_0 \left( \frac{J_1(ka \sin \theta)}{ka \sin \theta} \right)^2$ .

$J_1(z)$  的第一个零点在  $z = 1.22\pi$  处, 因此第一个暗环

$$\sin \theta_1 = \frac{1.22\pi}{ka} = 0.61 \frac{\lambda}{a} \approx \Delta \theta$$

或  $\Delta \theta = 1.22 \frac{\lambda}{2a}$  为第一暗环的角半径.

光学仪器最小分辨角:  $\delta \theta_{\min} = 1.22 \frac{\lambda}{2a}$  — 瑞利判据.

增大光学仪器的放大率, 虽然放大了像点之间的距离, 但每个像的衍射斑也被放大了, 光学仪器不能辨之物放得再大, 也不为肉眼或照相底片所辨.

### 3. 多缝夫琅禾费衍射和光栅.

光栅常数  $d = a + b$  缝宽:  $a$ , 缝间不透明部分宽度:  $b$ .  $N$ : 总缝数.

设单色光入垂直光栅面入射. 每条缝发出的光在衍射角为  $\theta$  方向光振动振幅:

$$A_{10} = A_0 \frac{\sin \beta}{\beta}, \quad \beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$$

$A_{10}$  为每一条缝衍射的中央明纹的极大振幅.

由于透镜会聚, 所有  $N$  条缝发出的光在衍射角  $\theta$  方向总振幅的相干叠加.

由等振幅、等相位差多振动叠加公式:  $A_{\theta} = A_{10} \frac{\sin \frac{N\gamma}{2}}{\frac{\gamma}{2}}, \quad \gamma = \frac{2\pi}{\lambda} d \sin \theta$ .

$$\therefore A_{\theta} = A_{10} \frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma}, \quad \gamma = \frac{\delta}{2} = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

$$\therefore I_{\theta} = I_{10} \frac{\sin^2 \beta}{\beta^2} \frac{\sin^2 N\gamma}{\gamma^2}, \quad \text{则 } I_{\theta} = I_{10} \left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left( \frac{\sin N\gamma}{\gamma} \right)^2$$

$I_{10}$  为单缝衍射的中央明纹的极大强度.

$\left( \frac{\sin N\gamma}{\gamma} \right)^2$ : 多光束干涉因子. 极大值出现在  $\gamma = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda} = k\pi$ , 即  $d \sin \theta = k\lambda$ .

总光强即单缝产生光强的  $N^2$  倍.  $\sin N\gamma = 0$  时是两主极大间的暗纹.

$N\gamma = k'\pi, \quad \gamma = \frac{k'}{N}\pi, \quad k' = 1, 2, 3, \dots, N-1$ . 两主极大间有  $N-1$  个强度极小.

故有  $N-2$  个次极大.

$\left( \frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2$ : 单缝衍射因子: 便产生缺级现象

$d \sin \theta = \pm k\lambda$ : 主极大.

$a \sin \theta = \pm k'\lambda$ : 衍射极小.

$$\therefore k = \pm k' \frac{d}{a}, \quad k' = 1, 2, 3, \dots$$

对于那些离屏中心不远的极小,  $\sin \theta \approx \theta, \quad \theta_k \approx \frac{k\lambda}{d}$ , 相邻暗纹

$$\theta_{k+\Delta\theta} \approx \frac{(k+\Delta\theta)\lambda}{d}, \quad \therefore \text{半角宽 } \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd}$$

若主极大位置较偏, 则  $\sin \theta_k = k \frac{\lambda}{d} > \sin(\theta_k + \Delta\theta) = (k + \frac{1}{N}) \frac{\lambda}{d}$

$$\sin(\theta_k + \Delta\theta) - \sin \theta_k \approx \left( \frac{d \sin \theta}{d \theta} \right)_{\theta = \theta_k} \Delta\theta = \theta_k \Delta\theta, \quad \therefore \Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_k}$$

光栅光谱仪: 不同波长的同级主极大出现在不同方位.

1) 色散本领. 对一定波长差  $\Delta\lambda$  入射两条谱线, 其角间隔  $\Delta\theta$ , 在屏上的距离  $\Delta l$ .

角色散本领  $D_{\theta} = \frac{d\theta}{d\lambda}$ , 线色散本领  $D_l = \frac{dl}{d\lambda}$ .

设光栅后聚位物镜焦距为  $f$ , 则  $\Delta l = f \Delta\theta$ .  $D_l = f D_{\theta}$ .

由光栅方程:  $d \sin \theta_k = k \frac{\lambda}{d}$ .  $\therefore D_{\theta} = \frac{k}{d \cos \theta_k}, \quad D_l = \frac{fk}{d \cos \theta_k}$ .

2) 色分辨率本领: 谱线半角宽度  $\Delta\theta = \frac{\lambda}{Nd \cos \theta}$ . 由瑞利判据, 能分辨

$$\text{的最小波长差 } \Delta\lambda = \frac{\Delta\theta}{D_{\theta}} = \frac{\Delta\theta}{D_l} = \frac{d \cos \theta_k}{k} \cdot \frac{\lambda}{Nd \cos \theta_k} = \frac{\lambda}{kN} \quad \therefore R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = kN$$

## 4. 三维光栅 — X射线在晶体上的衍射.

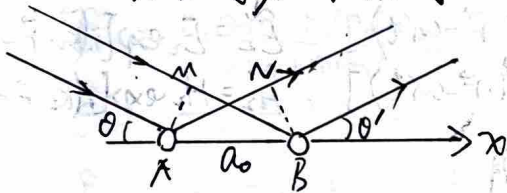
晶体: 外部几何形状规则, 内部原子周期性排列 — 晶格常量  $a_0 \sim 10^8 \text{m} \sim \text{Å}$ .

X射线:  $10 \text{Å} \sim 10^2 \text{Å}$  的  $\lambda \sim a_0$  故普通机械刻痕光栅不行射, 晶体便可行射.

1) 点间干涉: 一个晶面中各个格点间的干涉

在X射线照射下, 格点受迫振动成新波源向各方向发射与外来

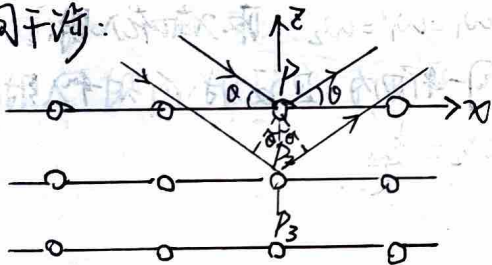
X射线频率相同的相干波



$$\delta = a_0 \sin \theta$$

$$\delta' = -a_0 \sin \theta'$$

2) 面间干涉:



$$\text{主极大: } 2d \sin \theta = k\lambda$$

— 使晶体内有很多晶面族, 不同取向不同间隔, 对于给定入射方向有不同衍射角, 故有一系列

布拉格条件:  $2d \sin \theta_1 = k_1 \lambda, 2d \sin \theta_2 = k_2 \lambda \dots$

对某晶面族取面内点间干涉的主极大与对各个可能的晶面族又取0级反射主极大是等效的.

劳埃相: 连续谱X射线照单晶体 — 给定晶体取向但不给定波长; 可确定晶轴方向

德拜相: 单色射线照多晶粉末 — 给定波长但不给定晶体取向; 可确定晶格常数

# 偏振

一、光在电介质表面的反射和折射。

无限大均匀各向同性介质中的单色平面电磁波有：

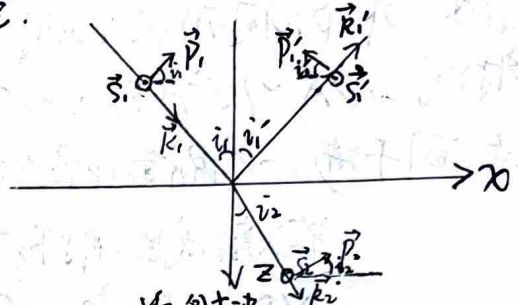
$$\vec{E} \perp \vec{H}, \vec{E} \times \vec{H} \parallel \vec{k}, \sqrt{\epsilon_0 \epsilon} \vec{E} = \sqrt{\mu_0 \mu} \vec{H}, k = \frac{n}{c} \omega$$

$$n = \sqrt{\epsilon \mu} \approx \sqrt{\epsilon} \quad \text{对于光频段, } \mu \approx 1, n \approx \sqrt{\epsilon}$$

边界关系：

$$\begin{aligned} D_{1n} &= D_{2n} & E_{1t} &= E_{2t} \\ B_{1n} &= B_{2n} & H_{1t} &= H_{2t} \end{aligned}$$

法向                  切向



入射波：

$$\tilde{E}_i = E_i \exp[i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$\tilde{H}_i = H_i \exp[i(\vec{k}_i \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

反射波：

$$\tilde{E}_r = E_r \exp[i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$\tilde{H}_r = H_r \exp[i(\vec{k}_r \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

折射波：

$$\tilde{E}_t = E_t \exp[i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

$$\tilde{H}_t = H_t \exp[i(\vec{k}_t \cdot \vec{r} - \omega t)]$$

边界条件在任何  $x, y, t$  都满足，又有

$$k_x = k'_x = k_{2x}, \quad k_y = k'_y = k_{2y}, \quad \omega_1 = \omega'_1 = \omega_2$$

取  $x$  轴在入射面内，则  $k_y = 0$ 。

从而， $k_y = k'_y = 0$ ，反射、折射和入射线在同一平面内，且反射、折射和入射波同频率。

$$\therefore \sin i_1 = \frac{k_x}{k_1}, \quad \sin i'_1 = \frac{k'_x}{k'_1}, \quad \sin i_2 = \frac{k_{2x}}{k_2}$$

$$\text{由 } k = \frac{n}{c} \omega, \quad k_{1x} = k'_{1x} = k_{2x}$$

$$\text{有 } k_1 = k'_1 = \frac{n_1 \omega}{c}, \quad k_2 = \frac{n_2 \omega}{c}$$

$$\therefore \sin i_1 = \sin i'_1, \quad n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \text{即反射与折射定律。}$$

$$\text{而 } k_{2z} = \sqrt{k_2^2 - k_{2x}^2} = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1^2 - k_{1x}^2} = \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 k_1^2 - k_1^2 \sin^2 i_1} = k_1 \sqrt{\left(\frac{n_2}{n_1}\right)^2 - \sin^2 i_1}$$

$$\text{令 } \sin i_c = n_2/n_1 \quad (i_c \text{ 为全反射临界角})，\text{ 则 } k_{2z} = k_1 \sqrt{\sin^2 i_c - \sin^2 i_1} = \frac{2\pi}{\lambda} \sqrt{\sin^2 i_c - \sin^2 i_1}$$

下面推导菲涅耳公式：

$$\text{边界关系分量方程 1: } -\epsilon_1 \epsilon_0 \tilde{E}_{ip} \sin i_2 = -\epsilon_2 \epsilon_0 (\tilde{E}_{ip} \sin i_1 + \tilde{E}'_{ip} \sin i'_1)$$

(电位移法向连续)

$$\text{边界关系分量方程 2: } \tilde{E}_{ip} \cos i_2 = \tilde{E}_{ip} \cos i_1 - \tilde{E}'_{ip} \cos i'_1$$

(电场切向连续)

$$\text{边界关系分量方程 3: } -\mu_1 \mu_0 \tilde{H}_{ip} \sin i_2 = -\mu_2 \mu_0 (\tilde{H}_{ip} \sin i_1 + \tilde{H}'_{ip} \sin i'_1)$$

(磁感在法向连续)

$$\text{边界关系分量方程 4: } \tilde{H}_{ip} \cos i_2 = \tilde{H}_{ip} \cos i_1 - \tilde{H}'_{ip} \cos i'_1$$

(磁场强度切向连续)

S: senkrecht 垂直 P: parallel 平行.

(科目: ) **数 学 作 业 纸**

编号: \_\_\_\_\_ 班级: \_\_\_\_\_ 姓名: \_\_\_\_\_ 第 6 页

$$\begin{aligned} \text{解得 } \tilde{E}_{ip} &= \frac{\epsilon_2 \sin i_2 \cos i_1 - \epsilon_1 \sin i_1 \cos i_2}{\epsilon_1 \sin i_1 \cos i_2 + \epsilon_2 \sin i_2 \cos i_1} \tilde{E}_{ip} & \tilde{H}_{ip} &= \frac{\mu_2 \sin i_2 \cos i_1 - \mu_1 \sin i_1 \cos i_2}{\mu_1 \sin i_1 \cos i_2 + \mu_2 \sin i_2 \cos i_1} \tilde{H}_{ip} \\ \tilde{E}_{zp} &= \frac{\epsilon_1 (\sin i_1 \cos i_1' + \sin i_1' \cos i_1)}{\epsilon_1 \sin i_1' \cos i_2 + \epsilon_2 \sin i_2 \cos i_1} \tilde{E}_{ip} & \tilde{H}_{zp} &= \frac{\mu_1 \sin i_1 \cos i_1' + \mu_1' \cos i_1}{\mu_1 \sin i_1' \cos i_2 + \mu_2 \sin i_2 \cos i_1} \tilde{H}_{ip} \end{aligned}$$

由  $\sqrt{\epsilon_0} \vec{E} = \sqrt{\mu_0} \vec{H}$  及  $\vec{E} \perp \vec{H}$ , 得

$$\tilde{H}_{ip} = -\sqrt{\frac{\epsilon_1 \epsilon_0}{\mu_1 \mu_0}} \tilde{E}_s, \quad \tilde{H}_{ip}' = -\sqrt{\frac{\epsilon_2 \epsilon_0}{\mu_2 \mu_0}} \tilde{E}_s', \quad \tilde{H}_{zp} = -\sqrt{\frac{\epsilon_0 \epsilon_2}{\mu_2 \mu_0}} \tilde{E}_{zs}$$

由  $\mu_1 \approx \mu_2 \approx 1$ ,  $n_i \approx \sqrt{\epsilon_i}$  及  $i_1' = i_1$ ,  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$ , 得

$$\tilde{E}_{ip} = \frac{n_2 \cos i_1 - n_1 \cos i_2}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \tilde{E}_{ip} = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \tilde{E}_{ip}$$

$$\tilde{E}_{zp} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \tilde{E}_{ip}$$

$$\tilde{E}_s' = \frac{n_1 \cos i_1 - n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \tilde{E}_s = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_1 + i_2)} \tilde{E}_s$$

$$\tilde{E}_{zs} = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2} \tilde{E}_s = \frac{2 \cos i_1 \sin i_2}{\sin(i_1 + i_2)} \tilde{E}_s$$

可见, 反射、折射光强的 P 分量又与入射光的 P 分量有关, S 分量又与 S 分量有关. P-S 两分量的振动是相互独立的.

二. 反射、折射时的偏振现象

|                  | P 分量                                                               | S 分量                                                                                                              |
|------------------|--------------------------------------------------------------------|-------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| 振幅反射率            | $\tilde{r}_p = \tilde{E}_{ip}' / \tilde{E}_{ip}$                   | $\tilde{r}_s = \tilde{E}_s' / \tilde{E}_s$                                                                        |
| 强度反射率<br>(能流反射率) | $R_p = \frac{I_p'}{I_p} = \frac{W_p'}{W_p} =  \tilde{r}_p ^2$      | $R_s = \frac{I_s'}{I_s} = \frac{W_s'}{W_s} =  \tilde{r}_s ^2$ ( $I = \frac{n}{2c\mu_0}  E ^2 \propto n  E ^2$ )   |
| 振幅透射率            | $\tilde{t}_p = \tilde{E}_{zp} / \tilde{E}_{ip}$                    | $\tilde{t}_s = \tilde{E}_{zs} / \tilde{E}_s$                                                                      |
| 强度透射率            | $T_p = \frac{I_{zp}}{I_p} = \frac{n_2  E_{zp} ^2}{n_1  E_{ip} ^2}$ | $T_s = \frac{I_{zs}}{I_s} = \frac{n_2  E_{zs} ^2}{n_1  E_s ^2}$ ( $I = \frac{n}{2c\mu_0}  E ^2 \propto n  E ^2$ ) |
| 能流透射率            | $\Gamma_p = \frac{W_{zp}}{W_p} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_p$    | $\Gamma_s = \frac{W_{zs}}{W_s} = \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_s$ ( $W = I/c, S_1/S_2 = \cos i_1 / \cos i_2$ )      |

由能量守恒  $W_{ip}' + W_{zp} = W_{ip}$ ,  $W_s' + W_{zs} = W_s$

$$\therefore R_p + T_p = 1, \quad R_s + T_s = 1, \quad \therefore R_p + \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_p = 1, \quad R_s + \frac{\cos i_2}{\cos i_1} T_s = 1.$$

$$\therefore |\tilde{r}_p|^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |\tilde{t}_p|^2 = 1, \quad |\tilde{r}_s|^2 + \frac{n_2 \cos i_2}{n_1 \cos i_1} |\tilde{t}_s|^2 = 1.$$

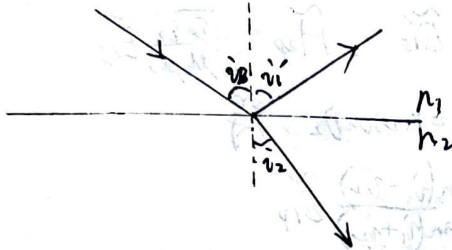
将菲涅耳反射折射公式代入振幅的反射率和透射率定义, 得:

$$\tilde{r}_p = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \quad \tilde{r}_s = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)}$$

$$\tilde{t}_p = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_2 \cos i_1 + n_1 \cos i_2} \quad \tilde{t}_s = \frac{2n_1 \cos i_1}{n_1 \cos i_1 + n_2 \cos i_2}$$

进一步可求出为强和能流的反射率和透射率。

考察  $\tilde{r}_p$  (振幅分量反射率), 当  $i_1 + i_2 = \frac{\pi}{2}$  时  $\tilde{r}_p = 0$  此时的入射角  $i_1$  称为布儒斯特角  $i_B = i_1$ , 有  $i_2 = \frac{\pi}{2} - i_B$ ,  $n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$   
 $\therefore i_B = \arctan \frac{n_2}{n_1}$ .



当  $i_1 \leq i_B$  即  $i_1 + i_2 \leq \frac{\pi}{2}$  时,  $\tan(i_1 + i_2) \geq 0$ ,  $\tilde{r}_p \geq 0$ .

若  $n_1 < n_2$ , 此时  $i_1 > i_2$ , 不发生全反射,  $\tan(i_1 - i_2) > 0$ , 又  $i_2 < i_B$ .

故  $i_1$  由 0 经  $i_B$  增至  $\frac{\pi}{2}$  时, 相位差  $\delta_p = -\arg \tilde{r}_p$  由 0 变  $\pi$ .

相位差  $\delta_s = -\arg \tilde{r}_s$  始终为  $\pi$ .

若  $n_1 > n_2$ , 此时  $i_1 < i_2$ , 当  $i_1 > i_c = \arcsin \frac{n_2}{n_1}$  时发生全反射.

由于  $i_c = \arcsin(\frac{n_2}{n_1}) > \arctan(\frac{n_2}{n_1}) = i_B$ . 故  $i_1$  增至布儒斯特角时并未发生全反射, 但  $\delta_p$  由  $\pi$  变至 0,  $\delta_s$  则始终为 0.

当  $i_1 > i_c$  时,  $\tilde{r}_p$  和  $\tilde{r}_s$  成为复数.

$$\tilde{r}_p = \frac{\tan(i_1 - i_2)}{\tan(i_1 + i_2)} \quad \tilde{r}_s = \frac{\sin(i_2 - i_1)}{\sin(i_2 + i_1)}$$

$$\text{得它们的辐角 } \delta_p = 2 \arctan \frac{n_1}{n_2} \sqrt{\frac{(n_1/n_2)^2 \sin^2 i_1 - 1}{\cos^2 i_1}} \quad \delta_s = 2 \arctan \frac{n_2}{n_1} \sqrt{\frac{(n_1/n_2)^2 \sin^2 i_1 - 1}{\cos^2 i_1}}$$

可以得到, 当一束光在正入射和掠入射情况下, 光从光疏介质到光密介质时电矢量方向反向, 振动相位突变  $\pi$ , 即有半波损失, 而其他情况(包括透射)没有.

总之, P分量与S分量的反射率和透射率一般不同, 且反射时还可能发生相位跃变. 所以反射和折射时会改变入射光的偏振态.

特别地, 当光束以布儒斯特角  $i_B$  入射则  $\tilde{r}_p = 0$ . 反射光中只有S分量, 线偏振. 故  $i_B$  又称全偏振角/起偏角.

### 三. 偏振态

1. 自然光: 各个方向有大量各种取向的横振动, 取向分布的概率各向同性  
彼此间无固定相位关联.

由偏振片的取向可分解为 s、p 两个分量, 通过的只有 p (parallel) 分量.  
强度为  $\frac{1}{2}I_0$ .

2. 线偏振光: 单一振动方向.  $A_t = A_0 \cos \theta$ ,  $I_t = I_0 \cos^2 \theta$ .

起偏器: 利用晶体的二向色性、利用晶体的光轴各向异性、  
(偏振片) (晶体棱镜偏振器)  
利用界面反射和折射. ....

(布儒斯特反射偏振器、透射玻璃片堆).

3. 部分偏振光: 振动各方向都有, 振幅不一.

偏振度  $p = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$ . 故自然光是非偏振光, 线偏振光是全偏振光.

4. 圆偏振光: 电矢量在波面内瞬时值大小不变, 方向以  $\omega$  匀速旋转.

$$\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = A \cos \omega t \hat{x} + A \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) \hat{y}. \quad +: \text{右旋} \quad -: \text{左旋}$$

$$I_0 = A_x^2 + A_y^2 = 2A^2$$

设偏振器的透射方向为 x, 则透射光强度  $I = A_x^2 = A^2 = \frac{1}{2}I_0$ .

5. 椭圆偏振光:  $\begin{cases} E_x = A \cos \omega t \\ E_y = A \cos(\omega t + \delta) \end{cases}$

$$\delta \neq \pm \frac{\pi}{2}, 0 < \delta < \pi$$

$$\therefore \vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = A \cos \omega t \hat{x} + A \cos(\omega t + \delta) \hat{y}. \quad \delta > 0 \text{ 右旋} \quad \delta < 0 \text{ 左旋}$$

### 圆偏振的各现象及应用.

1. 双折射:

ordinary light } 沿光轴时传播速度和传播方向一样.  
extraordinary light }

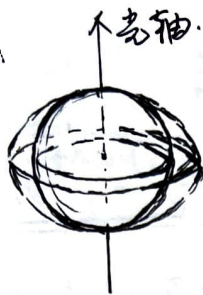
O 光与 e 光只在双折射晶体内部才有意义, 射出后都是线偏振光.

△ 主平面: 晶体中某光线 (o/e) 的传播方向和光轴方向所成平面.

入射面与主平面重合时, o, e 皆在此面内传播, 否则 e 光可能不在入射面内.

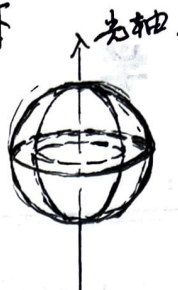
光轴: 晶体内的一个方向, o, e 不分, 若破坏晶体形状可破坏掉光轴.

负晶体:



$v_o > v_e, n_o < n_e$

正晶体

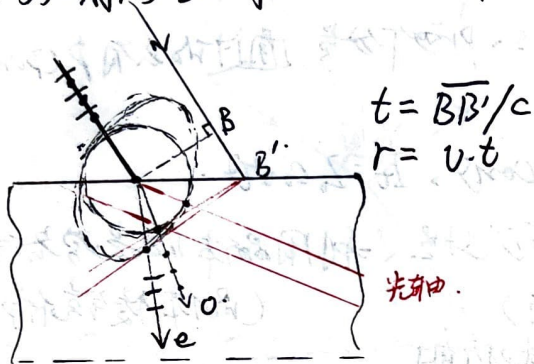


$v_o < v_e, n_o > n_e$

- △ O光由矢量振动方向与主平面垂直,
- △ e光由矢量振动方向在主平面内.

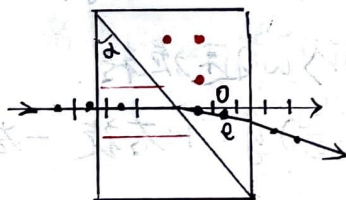
$n_o, n_e$ : 主折射率, 对应旋转椭球的长、短轴

主平面与入射面重合时, 用惠更斯作图法作出O、e方向.

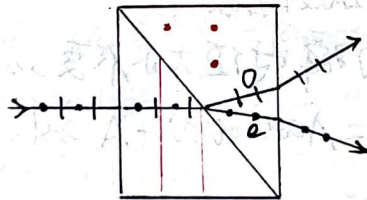


应用: 晶体偏振器.

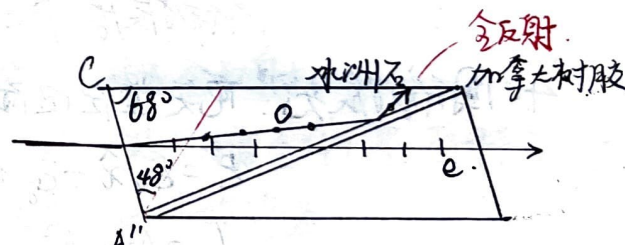
Rochon:



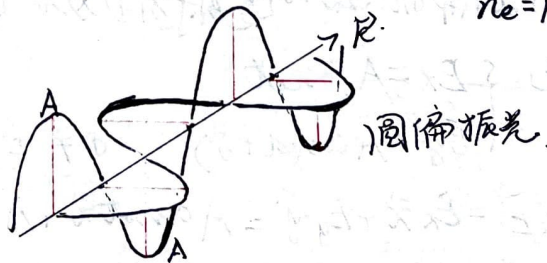
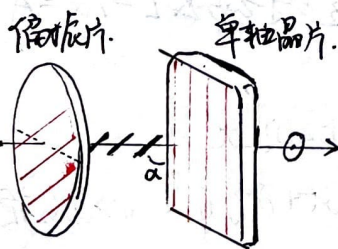
W.H. Wollaston:



W. Nicol:



对于钠黄光,  $n_o = 1.6584$   
 $n_e = 1.4854, n_{oz} = 1.55$



单色自然光通过偏振片成为线偏振光, 振幅为A. 振动方向与光轴夹 $\alpha$ .

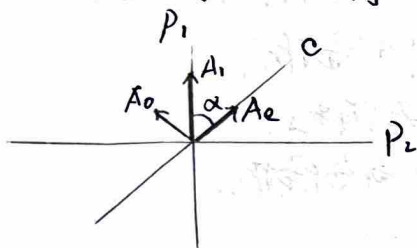
线偏振光在晶片内双折射, O光振动垂直于光轴:  $A_o = A \sin \alpha$ , e光振动平行于光轴:  $A_e = A \cos \alpha$ . 此外晶内O、e沿同方向传播, 且e光沿慢速度为 $v_e$ 的方向, 故

两束光射出后的相差  $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$ ,

若  $\Delta \varphi = \frac{\pi}{2}$ , 则  $\delta = (n_o - n_e) d = \frac{\lambda}{4}$ , 正椭圆偏振光, 若  $A_o = A_e \Rightarrow \alpha = \frac{\pi}{4}$  则圆偏振光.

若  $\Delta \varphi = \pi$ , 则  $\delta = (n_o - n_e) d = \frac{\lambda}{2}$ , 线偏振光, 振动面转了  $2\alpha$  角.

若在刚刚装置后再加一与前面偏振片正交的偏振片( $P_2$ ).



$$A_0 = A_1 \sin \alpha \quad A_e = A_1 \cos \alpha$$

过  $P_2$  后  $A_{20} = A_0 \cos \alpha = A_1 \sin \alpha \cos \alpha$ ,  $A_{2e} = A_e \sin \alpha = A_1 \cos \alpha \sin \alpha$ .

$\therefore P_1 \perp P_2$  时  $A_{2e} = A_{20}$ .

两相干偏振光总相差  $\Delta \varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d + \pi$ .

由于  $A_{20}$  与  $A_{2e}$  反方向, 故存在附加相差  $\pi$ .

当  $\Delta \varphi = 2k\pi$ ,  $(n_o - n_e) d = (k-1)\lambda$  干涉加强

当  $\Delta \varphi = (2k+1)\pi$ ,  $(n_o - n_e) d = k\lambda$  干涉减弱.

$d$  变化时会有干涉条纹, 如光弱型晶片;  $(n_o - n_e)$  有一定分布时也有干涉条纹, 如光测弹性的

## 2. 旋光.

振动面旋转角度  $\varphi = \alpha d$ ,  $\alpha$  旋光率,  $d$ : 晶片厚度.

菲涅耳: 线偏振光由  $\omega$  相同旋向相反的两圆偏振光合成, 两光在晶片

速度不同, 出晶体后  $\varphi_1 = \frac{\omega d}{v_1}$ ,  $\varphi_2 = \frac{\omega d}{v_2}$ . 则  $\varphi = \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$

$$= \frac{\omega}{2} \left( \frac{d}{v_1} - \frac{d}{v_2} \right) = \frac{\omega d}{2} \left( \frac{v_2}{v_1} - \frac{v_1}{v_2} \right) = \frac{\pi}{\lambda} (n_2 - n_1) d$$

$$\text{故 } \alpha = \frac{\varphi}{d} = \frac{\pi}{\lambda} (n_2 - n_1)$$

旋光糖量计:  $\varphi = \alpha N L$ .  $L$ : 管长,  $N$ : 溶液浓度.

磁致旋光: 沿光方向加磁场,  $\varphi = V \cdot LB$ ,  $V$  是常量.

# 偏振光的检验.

第一步 令入射光通过偏振片1, 改变偏振片1的偏振方向:

现象 有消光      强度无变化      强度有变化但无消光.

结论 线偏振      自然光或圆偏振.      部分偏振或椭圆偏振.

第二步

半波片+偏振片

半波片+偏振片.

现象 有消光 无消光

有消光 无消光.

结论 圆偏振 自然光

椭圆偏振 部分偏振.