

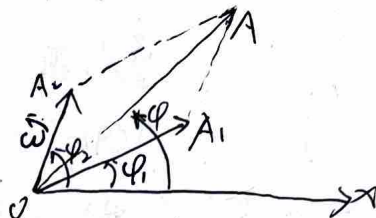
一. 同一直线上同频率简谐运动的合成

$$x_1 = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$x_2 = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

$$x = x_1 + x_2 = A \cos(\omega t + \varphi)$$

相量图:



$$\begin{cases} A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2 \cos(\varphi_2 - \varphi_1)} \\ \tan \varphi = \frac{A_1 \sin \varphi_1 + A_2 \sin \varphi_2}{A_1 \cos \varphi_1 + A_2 \cos \varphi_2} \end{cases}$$

同一直线上 n 个同频率简谐运动的合成. 设振幅相同.

$$x_1 = a \cos \omega t$$

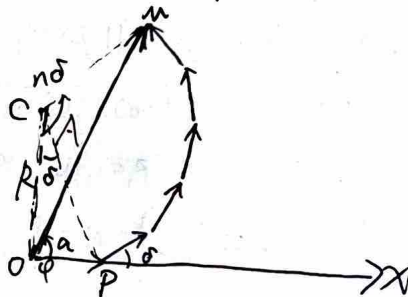
$$x_2 = a \cos(\omega t + \delta)$$

$$\vdots$$

$$x_n = a \cos[\omega t + (n-1)\delta]$$

$$A = 2a \sin \frac{n\delta}{2} \cdot a = 2a \sin \frac{\delta}{2}$$

相量图



$$\therefore A = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)}$$

$$\text{又} \because \angle COM = \frac{1}{2}(\pi - n\delta), \angle COP = \frac{1}{2}(\pi - \delta)$$

$$\therefore \varphi = \angle COP - \angle COM = \frac{n-1}{2} \delta$$

$$\therefore x = a \frac{\sin(n\delta/2)}{\sin(\delta/2)} \cos(\omega t + \frac{n-1}{2} \delta)$$

二. 相互垂直的简谐运动的合成 (同频率).

$$x = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$$

$$y = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$$

消去得 $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} - \frac{2xy}{A_1A_2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1) = \sin^2(\varphi_2 - \varphi_1)$

1) 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = 0$ 或 π 时, 得 $\frac{x^2}{A_1^2} \pm \frac{y^2}{A_2^2} = 0$. 直线.

2) 当 $\varphi_2 - \varphi_1 = \pm \frac{\pi}{2}$ 时, 得 $\frac{x^2}{A_1^2} + \frac{y^2}{A_2^2} = 1$ 正椭圆.

3) 当 $\varphi_2 - \varphi_1$ 为其它值时, 为斜椭圆.

三. 光的干涉

1. 振动方向相同、频率相同、相位差恒定的波的叠加.

光的波动特性由复电矢量表示: $\vec{E}(P, t) = \vec{E}_0(P) [\cos(\omega t - \varphi(P))]$.

在各向同性介质中, 满足傍轴条件时, 表示成 $u(P, t) = A(P) e^{-i[\omega t - \varphi(P)]} = u(P) \cdot e^{-i\omega t}$.

光强: $I(P) = [A(P)]^2 = u^*(P) \cdot u(P) = |u(P)|^2$.

线性介质中 $u(P) = u_1(P) + u_2(P)$,

$$\begin{aligned} I(P) &= u^*(P) \cdot u(P) = [u_1^*(P) + u_2^*(P)] [u_1(P) + u_2(P)] \\ &= [A_1(P)]^2 + [A_2(P)]^2 + A_1(P)A_2(P) \left[e^{-i\varphi_1(P) + i\varphi_2(P)} + e^{i\varphi_1(P) - i\varphi_2(P)} \right] \\ &= I_1(P) + I_2(P) + 2\sqrt{I_1(P)I_2(P)} \cos[\varphi_1(P) - \varphi_2(P)]. \end{aligned}$$

若两振幅相等, 则 $A_1(P) = A_2(P) = A$, $I_1(P) = I_2(P) = A^2$

$$\therefore I(P) = 2A^2 \{1 + \cos[\varphi_1(P) - \varphi_2(P)]\} = 4A^2 \cos^2 \frac{\varphi_1 - \varphi_2}{2}$$

定义衬比度 $\gamma = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$.

2. 时间相干性: 光的非单色性对干涉条纹的影响

波列长度 = 相干长度 = $\Delta x_{\max} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda}$ $\Delta\lambda$: 谱线宽度.

相干时间 $\tau = \frac{\Delta x_{\max}}{c}$.

3. 空间相干性: 光源的大小对干涉条纹的影响

相干间隔 $d_0 = \frac{R}{b} \lambda$. d_0 : 次波源间距. b : 光源宽度 R : 次波源到屏距离

相干孔径 $\theta_0 = \frac{d_0}{R} = \frac{\lambda}{b}$. 即相干间隔对光源中心所张角度.

$\varphi = \frac{b}{R} = \frac{\lambda}{d_0}$ 即在次波源处光源的角直径. 用于测量仪.

4. 由普通光源获得相干光.

能级跃迁 \rightarrow 断续的波列 \rightarrow 各次发光相互独立.

非相干叠加: $I(P) = I_1(P) + I_2(P)$, $\overline{\cos[\varphi_1(P) - \varphi_2(P)]} = 0$.

把光源上同一点发的光分为两部分. 这两部分可相干叠加 (同发光原子的同论发光).

5. 分波振面法.

1) 杨氏双缝. $\delta \approx d \sin \theta$

$$\begin{cases} d \sin \theta = k\lambda : \text{相长} & k=0, 1, 2, \dots \\ d \sin \theta = (2k-1)\frac{\lambda}{2} : \text{相消} & k=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$\Delta \theta = \frac{\lambda}{d \cos \theta}$ 两明(暗)纹间距

$x = D \tan \theta \approx D \sin \theta$

$$\begin{cases} x = k \frac{D}{d} \lambda : \text{相长} & k=0, 1, 2, \dots \\ x = (2k-1) \frac{D}{2d} \lambda : \text{相消} & k=1, 2, 3, \dots \end{cases}$$

$\Delta x = \frac{D}{d} \lambda$ 两明(暗)间距.

2) 菲涅耳双透镜;

3) 劳埃透镜: 中央加暗纹. 有半波损失(光疏 \rightarrow 光密).

6. 分振幅法

1) 劈尖等厚条纹 $\delta = 2nh + \frac{\lambda}{2}$

$$\begin{cases} 2nh + \frac{\lambda}{2} = k\lambda : \text{相长} & k=1, 2, 3, \dots \\ 2nh + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} : \text{相消} & k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$\Delta h = \frac{\lambda}{2n}$ 两明(暗)纹厚度差.

$x = \frac{h}{\sin \theta} \approx \frac{h}{\theta}$

$$\begin{cases} x = (k - \frac{1}{2}) \frac{\lambda}{2n\theta} : \text{相长} & k=1, 2, 3, \dots \\ x = k \cdot \frac{\lambda}{2n\theta} : \text{相消} & k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$\Delta x = \frac{\lambda}{2n\theta}$ 两明(暗)间距

2) 牛顿环等厚条纹 $\delta = 2h + \frac{\lambda}{2}$

$$\begin{cases} 2h + \frac{\lambda}{2} = k\lambda : \text{相长} & k=1, 2, 3, \dots \\ 2h + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} : \text{相消} & k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$\Delta h = \frac{\lambda}{2}$ 两明(暗)环高度差.

$r^2 = R^2 - (R-h)^2 \approx 2Rh$

$$\begin{cases} r = \sqrt{\frac{(2k-1)R\lambda}{2}} : \text{相长} & k=1, 2, 3, \dots \\ r = \sqrt{kR\lambda} : \text{相消} & k=0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$\Delta r^2 = R\lambda$ 两明(暗)环“间距”.

3) 薄膜等倾条纹. $\delta = 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2}$. 薄膜透射等倾条纹与之互补.

$$\begin{cases} 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = k\lambda : \text{相长} & k = 1, 2, 3, \dots \\ 2h\sqrt{n^2 - \sin^2 i} + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} : \text{相消} & k = 0, 1, 2, \dots \end{cases}$$

$$\sin i = n \sin r$$

$$\begin{cases} 2nh \cos r + \frac{\lambda}{2} = k\lambda : \text{相长} & k = 1, 2, 3, \dots & \Delta h = \frac{\lambda}{2n} \text{ 改变膜厚时中心斑点的增减} \\ 2nh \cos r + \frac{\lambda}{2} = (2k+1)\frac{\lambda}{2} : \text{相消} & k = 0, 1, 2, \dots & -\Delta r = \frac{\lambda}{2nh \sin r} \text{ 照明(暗)环角间距} \end{cases}$$

4) 增透膜: 反射光干涉相消 $2nc h = (2k-1)\frac{\lambda}{2}$, $\therefore h_{\min} = \frac{\lambda}{4nc}$.

高反射膜: 反射光干涉相长 $2nc h = k\lambda$, $\therefore h_{\min} = \frac{\lambda}{2nc}$ ($n_0 < n_c < n$).

5). 迈克耳孙干涉仪的等倾与等厚: 分光板、补偿板.

等倾: M_1, M_2 严格垂直 \rightarrow 平行平面空气膜

等厚: M_1, M_2 不严格垂直 \rightarrow 空气劈尖

} 测长度、测折射率
检查光学元件质量...

四. 光的衍射.

1. 惠更斯-菲涅耳原理: 子波相干叠加.

干涉: 分立光束相干叠加 衍射: 连续无穷子波相干叠加.

2. 近场(菲涅耳衍射) \rightarrow 远场(夫琅禾费衍射): 光源观察屏无穷远.

1) 单缝

将单缝处波阵面 AB 分成 N 条等宽波带, 每条 $ds = a/N$. 相差 $\delta = \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{a \sin \theta}{N}$.

每条振幅 ΔA , 则合振幅为 $A_0 = \Delta A \cdot \frac{\sin N\delta/2}{\sin \delta/2} = \Delta A \frac{\sin N\delta/2}{\delta/2} = N\Delta A \cdot \frac{\sin N\delta/2}{N\delta/2}$.

令 $\beta = \frac{N\delta}{2} = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}$, 则 $A_0 = (N\Delta A) \cdot \frac{\sin \beta}{\beta}$. $I = (N\Delta A)^2 \left(\frac{\sin \beta}{\beta}\right)^2$.

(科目:) **数 学 作 业 纸**

编号:

班级:

姓名:

第 页

半波带法:

$$\begin{cases} a \sin \theta = k\lambda & \text{暗纹 } k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ a \sin \theta = (2k \pm 1) \frac{\lambda}{2} & \text{明纹 (近似) } k = \pm 1, \pm 2, \dots \quad \text{明纹宽 } \Delta x \approx \frac{f\lambda}{a} \text{ (傍轴).} \\ \theta = 0 & \text{中央条纹中心. 中央明纹线宽 } \Delta x = 2f \tan \theta \approx 2f \sin \theta = 2f \cdot \frac{\lambda}{a}. \end{cases}$$

2) 圆孔

第1极小角位置: $\sin \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$

瑞利判据: 两衍射级角距离 = 两衍射级角半径. $\delta \theta = 1.22 \frac{\lambda}{D}$ (分辨率), $R = \frac{1}{\delta \theta}$ (分辨率)

大口径物镜 \rightarrow 望远镜
短波长光 \rightarrow 电子显微镜

不相干叠加.

3) 光栅. (屏在远平面上)

$$I_{\theta} = I_0 \left(\frac{\sin \beta}{\beta} \right)^2 \left(\frac{\sin N\gamma}{\sin \gamma} \right)^2$$

$(\sin N\gamma / \sin \gamma)^2$: 多光束干涉因子

$$\beta = \frac{\pi a \sin \theta}{\lambda}, \quad \gamma = \frac{\pi d \sin \theta}{\lambda}$$

主极大: $\gamma = k\pi, d \sin \theta = k\lambda, k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ (明亮)

暗纹: $N\gamma = 0, N d \sin \theta = k'\lambda, k' = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm(N-1)$

次极大: 两暗纹间. 两主极大间有 $N-2$ 条次极大.

$(\sin \beta / \beta)^2$: 单缝衍射因子. 暗纹: $\beta = k''\pi, a \sin \theta = k''\lambda, k'' = 1, 2, 3, \dots$

缺级, $k = \pm \frac{d}{a} k'', k'' = 1, 2, 3, \dots$

光栅光谱: 复色光入射, 光栅光谱由若干不可色细光谱线组成.

角间隔: $d \sin \theta \delta \theta = k\lambda, \delta \theta = \frac{k\lambda}{d \cos \theta}$

半角宽: $N d \sin(\theta + \Delta \theta) = N k \lambda + \lambda, \Delta \theta = \frac{\lambda}{N d \cos \theta}$

刚好能分辨时 $\delta \theta = \Delta \theta, R = \frac{1}{\delta \lambda} = kN$. 光栅分辨率

4) 三维光栅 — X射线晶体衍射

$\delta = 2d \sin \theta$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{劳厄: 连续谱 X 射线照单晶体} \\ \text{德拜: 单色 X 射线照多晶粉末.} \end{array} \right.$

五. 光的偏振.

1. 偏振态.

1) 自然光. 各向同性横振动, 无相联系, 过偏振片后强度为 $\frac{1}{2}I_0$.

2) 线偏振光: $A_0 = A_0 \cos\theta, I_0 = I_0 \cos^2\theta$.

获得: $\left\{ \begin{array}{l} \text{晶体的二向色性: 偏振片.} \\ \text{晶体的光学各向异性: 晶体透镜.} \\ \text{反射和折射: 布儒斯特窗、透射玻璃片堆.} \end{array} \right.$

圆偏振光: $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = A \cos \omega t \hat{x} + A \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{2}) \hat{y}$

$I_0 = A_x^2 + A_y^2 = 2A^2$, 过偏振片后强度为 $\frac{1}{2}I_0$.

椭圆偏振光: $\vec{E} = E_x \hat{x} + E_y \hat{y} = A_x \cos \omega t \hat{x} + A_y \cos(\omega t + \varphi) \hat{y}$

消去得 $\frac{x^2}{A_x^2} + \frac{y^2}{A_y^2} - \frac{2xy}{A_x A_y} \cos \varphi = \sin^2 \varphi$.

3) 部分偏振光: 自然光 + 线偏振光.

偏振度: $P = \frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}}$

2. 反射和折射时光的偏振.

自然光在介质分界面上反射或折射后变为部分偏振光.

反射: $\perp > \parallel$; 折射: $\parallel > \perp$.

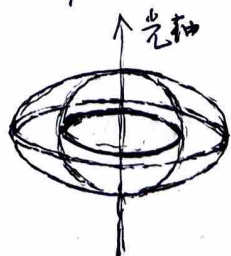
$i_0 + r = 90^\circ$ 时, 即 $\tan i_0 = \frac{n_2}{n_1}$ 时, 反射: \perp ; 折射: \parallel 且 \perp .

3. 双折射现象.

正晶体: $n_e > n_o$



负晶体: $n_e < n_o$



主平面: 晶体中某束光线传播方向和光轴方向所成平面。

ordinary light: 振动方向垂直于其主平面。

extraordinary light: 振动方向在其主平面内。

特殊情况下 o 光主平面和 e 光主平面重合。此时可用惠更斯作图法。

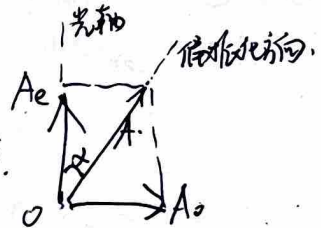
设光轴平行于晶面, 光线垂直晶面入射。

1). 线偏振光通过。

o、e 光相差: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) \cdot d$.

$\vec{A} = A \cos\alpha \cos\omega t \hat{e} + A \sin\alpha \cos(\omega t + \Delta\varphi) \hat{o}$.

椭圆偏振光。



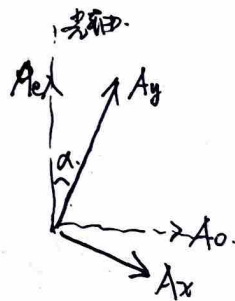
2). 椭圆偏振光通过。

$\vec{A}_x = \hat{A}_x \cdot A_x \cos\omega t$.

$\vec{A}_y = \hat{A}_y \cdot A_y \cos(\omega t + \varphi)$.

投影到光轴坐标系中, $\vec{A}_e = [-A_x \sin\alpha \cos\omega t + A_y \cos\alpha \cos(\omega t + \varphi)] \hat{e}$

$\vec{A}_o = [A_x \cos\alpha \cos\omega t + A_y \sin\alpha \cos(\omega t + \varphi)] \hat{o}$.



$\begin{aligned} \therefore A_e &= -A_x \sin\alpha \cos\omega t + A_y \cos\alpha \cos\omega t \cos\varphi - A_y \cos\alpha \sin\omega t \sin\varphi \\ &= (A_y \cos\alpha \cos\varphi - A_x \sin\alpha) \cos\omega t + (-A_y \cos\alpha \sin\varphi) \sin\omega t \\ &= A_e' \cos(\omega t + \varphi_1) \end{aligned}$

$\begin{aligned} A_o &= A_x \cos\alpha \cos\omega t + A_y \sin\alpha \cos\omega t \cos\varphi - A_y \sin\alpha \sin\omega t \sin\varphi \\ &= (A_x \cos\alpha + A_y \sin\alpha \cos\varphi) \cos\omega t + (-A_y \sin\alpha \sin\varphi) \sin\omega t \\ &= A_o' \cos(\omega t + \varphi_2) \end{aligned}$

过晶片后, 附加相差 $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda} (n_o - n_e) d$, $A_e \cdot \hat{e} + A_o \cdot \hat{o}$ 仍是椭圆偏振光。

3) 自然光通过: 仍是自然光。

偏振光的检验:

第一步: 令入射光通过偏振片₁, 改变偏振片₁的透射方向.

现象	有消光	强度无变化	强度有变化但无消光
结论	线偏振	自然光或圆偏振	部分偏振或椭圆偏振.
第二步		λ/4波片 + 偏振片 ₂	λ/4波片 + 偏振片 ₂ (一定取向).
现象		有消光 无消光	有消光 无消光
结论		圆偏振 自然光	椭圆偏振 部分

偏振光的干涉:

偏振片 + 晶片 + 偏振片: $\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}(n_{\text{ord}} - n_{\text{e}})d$, 对有附加相差 π .

{ 晶片厚度不均匀, 单色自然光入射: 干涉条纹

{ 晶片厚度一定, 白光入射: 色偏振.

{ 晶片厚度不均匀, 白光入射: 彩色条纹.

4. 旋光现象.

$$\theta = \frac{\varphi_R - \varphi_L}{2} = \frac{\omega}{2} \left(\frac{1}{v_L} - \frac{1}{v_R} \right) = \frac{\pi l}{\lambda} \left(\frac{c}{v_L} - \frac{c}{v_R} \right) = \frac{\pi}{\lambda} (n_L - n_R) l.$$

$$\text{旋光率 } \alpha = \frac{\theta}{l} = \frac{\pi}{\lambda} (n_L - n_R).$$

六. 辐射的粒子性.

1. 黑体辐射. 均匀、稳定、各向同.

$u(\nu, T)$: 在频率 ν 附近单位频率范围内的热辐射能量密度: 热辐射能谱.

$u(T) = \int u(\nu, T) d\nu$: 热辐射能量密度

$$e(\nu, T) = \frac{1}{\Delta S} \int \cos\theta \cos\theta' u(\nu, T) \frac{d\Omega}{4\pi} = \frac{c u(\nu, T)}{4\pi} \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} \sin\theta \cos\theta' d\phi.$$

= $\frac{1}{2} c u(\nu, T)$: 照射在物本单位面积上的幅射通量谱.

(科目:) **数 学 作 业 纸**

编号:

班级:

姓名:

第 页

吸收本领 $a(\nu, T) = \frac{\text{被物体吸收的辐射通量谱}}{\text{照射在物体上的辐射通量谱}} (e_{0\nu, T})$
 发射本领 $r(\nu, T) = \text{从物体单位表面发出的辐射通量谱。}$

1) 热平衡的要求: $r_i(\nu, T) = a_i(\nu, T) \cdot e_{0\nu, T}, i=1, 2, 3, \dots$ 吸收=发射.

$$\therefore \frac{r_i(\nu, T)}{a_i(\nu, T)} = e_{0\nu, T} = \frac{1}{4} c u(\nu, T), \text{ 又与辐射场能谱有关.}$$

2) 黑体的要求: $a_i(\nu, T) = 1$: 照射=吸收

$$\therefore r(\nu, T) = \frac{1}{4} c u(\nu, T) : \text{黑体辐射本领.}$$

普朗克黑体辐射定律:

1) 光子态密度:

三维盒子 ABC 中, 辐射波 $\vec{A} e^{i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega t)}$ 满足 $k_x A = l\pi, k_y B = m\pi, k_z C = n\pi.$

$$\therefore k^2 = k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = \pi^2 \left[\left(\frac{l}{A}\right)^2 + \left(\frac{m}{B}\right)^2 + \left(\frac{n}{C}\right)^2 \right] = \left(\frac{2\pi\nu}{c}\right)^2.$$

$$\therefore \frac{l^2}{\left(\frac{2A\nu}{c}\right)^2} + \frac{m^2}{\left(\frac{2B\nu}{c}\right)^2} + \frac{n^2}{\left(\frac{2C\nu}{c}\right)^2} = 1.$$

$\therefore l, m, n$ 只取 0 及正整数.

\therefore 所有可能的取值数

$$N(\nu) = \frac{1}{8} \cdot \frac{4\pi}{3} \left(\frac{2A\nu}{c}\right) \cdot \left(\frac{2B\nu}{c}\right) \cdot \left(\frac{2C\nu}{c}\right) = \frac{4\pi V \nu^3}{3c^3}.$$

\therefore 单位体积单位频率内

$$n_0(\nu) = \frac{2}{V} \cdot \frac{dN(\nu)}{d\nu} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \quad (\text{电磁波有两个偏振方向}).$$

~~\therefore 单位体积内能量在 ν 附近单位能量间隔内光子态的数目~~

~~$$n_0(\nu) = \frac{8\pi\nu^2}{hc^3}.$$~~

2) 光子平均能量.

光子能量可取值 $\epsilon = h\nu, 2h\nu, 3h\nu, \dots$

统计平衡时正比于玻耳兹曼因子 $e^{-\frac{\epsilon}{kT}}$.

$$\therefore \bar{\epsilon} = \frac{\sum_{n=0}^{\infty} n \epsilon_0 e^{-n\epsilon_0/kT}}{\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n\epsilon_0/kT}} = \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}.$$

六. 热辐射能量谱密度

$$u(\nu, T) = \rho(\nu) \cdot \bar{\epsilon} = \frac{8\pi\nu^2}{c^3} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

六. 黑体辐射本领

$$r_0(\nu, T) = \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT} - 1}$$

又: $r_0(\nu, T) d\nu = r_0(\lambda, T) d\lambda$, $\lambda\nu = c$, 得

$$r_0(\lambda, T) = \frac{2\pi c}{\lambda^5} \cdot \frac{hc\lambda}{e^{hc/\lambda kT} - 1}$$

低频: $h\nu \ll kT$ $r_0(\nu, T) \rightarrow \frac{2\pi\nu^2}{c^2} kT$; 高频 $h\nu \gg kT$ $r_0(\nu, T) \rightarrow \frac{2\pi\nu^2}{c^2} \cdot \frac{h\nu}{e^{h\nu/kT}}$

黑体总辐射本领: $R_0(T) = \int_0^\infty r_0(\nu, T) d\nu = \sigma T^4$

黑体辐射能谱峰值: $\lambda_m = C \cdot T \cdot (\frac{dr_0}{d\lambda} = 0)$

2. 光电效应: 紫外光; 光子-电子能量守恒. $h\nu = A + \frac{1}{2}mv^2$, $eU_0 = \frac{1}{2}mv_m^2$

3. 康普顿效应: X射线; 光子-电子能量动量守恒. $\Delta\lambda = \frac{h}{m_0c} (1 - \cos\varphi)$ 仍有原波长.

七. 波函数. 玻恩统计诠释.

$$\psi(\vec{r}, t)$$

概率密度 $|\psi(\vec{r}, t)|^2 = \psi^*(\vec{r}, t) \cdot \psi(\vec{r}, t)$

概率 $\int_{\Omega} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV$ 归一化: $\int_{\infty} |\psi(\vec{r}, t)|^2 dV = 1$

标准条件: 单值有限连续; 若势能不为 ∞ , 波函数可导连续.

态叠加原理: $\begin{cases} \psi = \sum_n C_n \psi_n & \text{离散谱} \\ \psi = \int C_n \psi_n d\lambda & \text{连续谱} \end{cases}$

八. 力学量与算符.

厄密算符: $\int \psi^* \hat{F} \phi dx = \int (\hat{F} \psi)^* \phi dx$

本征值方程: $\hat{F} \psi = \lambda \psi$, \hat{F} 本征值入皆为实数.

(科目:) 数 学 作 业 纸

编号:

班级:

姓名:

第 页

1) 坐标: $\hat{A} = \vec{r}$

本征值: \vec{r} 本征函数: $\delta(\vec{r} - \vec{r}_0)$

2) 动量: $\hat{p} = -i\hbar \nabla$

本征值: \vec{p} 本征函数: $A e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}$ 归一化 $A = \frac{1}{(2\pi\hbar)^{3/2}}$; 箱归一化: $A = \frac{1}{L^{3/2}}$

3) 轨道角动量: $\hat{L} = \hat{r} \times \hat{p}$

$\hat{L}^2 = -\hbar^2 \left(\frac{1}{\sin\theta} \frac{\partial}{\partial\theta} \sin\theta \frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta} \frac{\partial^2}{\partial\phi^2} \right)$

本征值: $l(l+1)\hbar^2$ 本征函数: $Y_{lm}(\theta, \phi)$ $l=0, 1, 2, \dots$ 角量子数

$\hat{L}_z = -i\hbar \frac{\partial}{\partial\phi}$

本征值: $m\hbar$ 本征函数: $Y_{lm}(\theta, \phi)$ $m = -l, \dots, 0, \dots, +l$

4) 能量: $\hat{H} = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{r}) = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r})$

① 自由粒子: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2$

本征值: E 本征函数 $A e^{i\vec{p} \cdot \vec{r}}$

② 一维无限深势阱: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2}$ ($0 < x < L$)

本征值: $E_n = \frac{n^2 \pi^2 \hbar^2}{2mL^2}$ 本征函数: $\sin \frac{n\pi x}{L}$

③ 一维谐振子: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + \frac{1}{2} m \omega^2 x^2$

本征值: $E_n = (\frac{1}{2} + n)\hbar\omega$ 本征函数: $\left(\frac{m\omega/\hbar}{2^n n! \sqrt{\pi}}\right)^{1/2} H_n(\sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}} x) e^{-\frac{m\omega}{2\hbar} x^2}$

④ 双原子分子转动: $\hat{H} = \frac{\hat{L}^2}{2I}$

本征值: $E_l = \frac{l(l+1)\hbar^2}{2I}$, $l=0, 1, 2, \dots$ 本征函数 $Y_{lm}(\theta, \phi)$

⑤ 库仑场: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\hbar^2}{2m r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial}{\partial r} - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} + \frac{\hat{L}^2}{2m r^2}$

本征值与本征函数见书。

⑥ 势垒穿透: $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U_0$ ($0 < x < a$)

穿透系数 $T \propto e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}$, 反射: $T \propto e^{-\frac{2a}{\hbar} \sqrt{2m(U_0 - E)}}$

(科目:) 数 学 作 业 纸

编号:

班级:

姓名:

第 页

本征函数的正交性: $\left\{ \begin{array}{l} \text{离散谱 } \lambda_k: \int \phi_k^* \phi_l dx = \delta_{kl} \\ \text{连续谱 } \lambda: \int \phi_\lambda^* \phi_\lambda dx = \delta(\lambda - \lambda') \end{array} \right\}$ 简并的通过变换也正交.

本征函数的完备性: $\psi(x) = \sum_n C_n \phi_n(x)$

$$C_n = \frac{\int \phi_n^* \psi(x) dx}{\int \phi_n^* \phi_n dx} \quad \text{概率密度/分布列}$$

设 $\{\phi_n\}$ 正交归一化, 则 $C_n = \int \phi_n^* \psi(x) dx$.

设 $\psi(x)$ 也归一化, 则 $\sum_n |C_n|^2 = \sum_{mn} C_m^* C_n \delta_{mn} = \sum_{mn} C_m^* C_n \int \phi_m^*(x) \phi_n(x) dx = \int \psi^*(x) \psi(x) dx = 1$.

力学量的平均值: $\bar{F} = \sum_n \lambda_n |C_n|^2 = \int \psi^*(x) \hat{F} \psi(x) dx / \int \psi^*(x) \psi(x) dx$.

证明: $\int \psi^*(x) \hat{F} \psi(x) dx = \sum_{mn} C_m^* C_n \int \phi_m^*(x) \hat{F} \phi_n(x) dx$
 $= \sum_{mn} C_m^* C_n \lambda_n \int \phi_m^*(x) \phi_n(x) dx \Rightarrow$

设 $\{\phi_n\}$ 正交归一化, 则 $\int \psi^*(x) \hat{F} \psi(x) dx = \sum_{mn} C_m^* C_n \lambda_n \delta_{mn} = \sum_n \lambda_n |C_n|^2$.

设 $\psi(x)$ 也归一化, 则 $\bar{F} = \sum_n \lambda_n |C_n|^2 = \int \psi^*(x) \hat{F} \psi(x) dx$.

每次测量得出结果后, 被测状态向与该次测量所得本征态对应本征态坍缩.
 测量误差与算符的对易关系:

一组算符有共同本征函数且本征函数组成完备系, 当且仅当算符两两对易.
 若两算符不对易, $\hat{F}\hat{G} - \hat{G}\hat{F} = i\hbar$, $\Delta\hat{F} = \hat{F} - \bar{F}$, $\Delta\hat{G} = \hat{G} - \bar{G}$, 则 $(\Delta\hat{F})^2 \cdot (\Delta\hat{G})^2 \geq \frac{\hbar^2}{4}$.

eg: $\Delta x \cdot \Delta p_x \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta x \cdot \Delta p_y = 0$,
 $\Delta E \cdot \Delta t \geq \frac{\hbar}{2}$, $\Delta L^2 \cdot \Delta L_z = 0$.

九. 薛定谔方程.

波动方程 $\psi(x,t) = \hat{H} \psi(x,t)$, 若 U 不含时, 则 $\hat{H} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 + U(\vec{r})$.

分离变量解得 $\psi(\vec{r}, t) = \phi(\vec{r}) \cdot e^{-iEt/\hbar}$, $|\psi(\vec{r}, t)| = |\phi(\vec{r})|$.

编号:

班级:

姓名:

第

页

氢原子

近似认为质子和电子运动, 电子能量代表所有能.

1. 以质子为坐标原点的电子能量本征方程:

$$\left(-\frac{\hbar^2}{2m_e} \nabla^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right) \psi + \frac{\hat{L}^2}{2m_e r^2} \psi = E \psi$$

解得 $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) Y_{lm}(\theta, \varphi)$.

$$E_n = -\frac{m_e e^4}{2(4\pi\epsilon_0)^2 \hbar^2} \frac{1}{n^2} \quad n=1, 2, 3, \dots \text{主量子数}$$

$$L = \sqrt{l(l+1)} \cdot \hbar \quad l=0, 1, \dots, n-1 \text{角量子数}$$

$$L_{z m_l} = m_l \hbar \quad m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l \text{磁量子数}$$

$$\therefore dP = |\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)|^2 dV = |R_{nl}(r)|^2 |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 r^2 dr \sin\theta d\theta d\varphi$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{径向概率密度: } v_{nl}(r) = |R_{nl}(r)|^2 r^2 \\ \text{角向概率密度: } w_{lm}(\theta, \varphi) = |Y_{lm}(\theta, \varphi)|^2 \end{array} \right.$$

2. 电子自旋与轨道耦合

$$S = \sqrt{s(s+1)} \cdot \hbar \quad s = \frac{1}{2} \quad \text{自旋量子数}$$

$$S_{z m_s} = m_s \hbar \quad m_s = \pm \frac{1}{2} \quad \text{自旋磁量子数}$$

$$\text{总角动量 } \vec{j} = \vec{L} + \vec{S} \quad j = \sqrt{j(j+1)} \cdot \hbar$$

$$\left\{ \begin{array}{l} l=0 \text{ 时, } \vec{j} = \vec{S}, j = s = \frac{1}{2} \\ l \neq 0 \text{ 时, } j = l+s = l+\frac{1}{2} \text{ 或 } j = l-s = l-\frac{1}{2} \end{array} \right. \text{用余弦定理可标示 } \vec{L}, \vec{S}, \vec{j} \text{ 间关系}$$

$$\text{电子自旋磁矩: } \vec{\mu}_s = -\frac{e}{m_e} \vec{S}$$

$$\text{在 } z \text{ 方向投影: } \mu_{s,z} = \frac{e}{m_e} S_z = \frac{e}{m_e} m_s \hbar \quad m_s = \pm \frac{1}{2}$$

$$\therefore \mu_{s,z} = \pm \frac{e\hbar}{2m_e} = \pm \mu_B$$

$$\therefore E_s = -\vec{\mu}_s \cdot \vec{B} = -\mu_{s,z} B = \mp \mu_B B \sim 10^5 \text{ eV} \quad \text{一般原子, } E_{n,l,s} = E_{n,l} + E_s = E_{n,l} \pm \mu_B B$$

施特恩-格喇赫实验: ($A_g: \vec{L}=0, \vec{j}=\vec{S}$)

→ 能量最低原理; 泡利不相容原理

$$F_m = -\frac{\partial E}{\partial z} = \pm \mu_B \frac{\partial B}{\partial z}, \quad \text{又 } \frac{1}{2} m v^2 = \frac{3}{2} kT$$

自旋S为半整数

$$\therefore \Delta z = 2 \times \frac{1}{2} \mu_B \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right) = \frac{F_m}{m} \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^2 = \frac{\mu_B}{m} \frac{\partial B}{\partial z} \cdot \frac{\partial^2}{3kT/m} = \frac{\mu_B}{3kT} \frac{\partial B}{\partial z}, \text{ 两磁极线间距}$$

3. 碱金属能级.

- 轨道贯穿: 较小的轨道, 电子可能进入原子.
- 原子实极化: 原子实负电荷重心向远离电子方向移动.

$$E_{nl} = \frac{-13.6 \text{ eV}}{(n - \Delta_{nl})^2} \quad \Delta_{nl}: \text{量子数亏损}$$

若外加磁场, 则价电子能级还与轨道磁量子数有关.

$$L_z = m_l \hbar$$

$$\mu_{lz} = -m_l \mu_B$$

$$\therefore E_B = -\vec{\mu} \cdot \vec{B} = -\mu_{lz} B = m_l \mu_B B, \quad m_l = -l, \dots, 0, \dots, +l$$

若考虑自旋, $J = \sqrt{j(j+1)} \hbar, \quad j = l \pm \frac{1}{2}, \quad E_{nlj} = E_{nl} + \Delta E_{ls}$

\therefore 碱金属价电子能级由 n, l, j, m_j 决定.

$$E = E_{nlj} + m_j \mu_B B$$